FUNGSI LINEAR TERBATAS PADA RUANG HILBERT

Tugas Akhir

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Jurusan Matematika

Oleh :

HASBI ASH SIDDIQ
10554001578

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2010

FUNGSI LINEAR TERBATAS PADA RUANG HILBERT

HASBI ASH SIDDIQ
10554001578

Tanggal Sidang: 11 Februari 2010
Periode Wisuda: Juli 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Diberikan $\langle \cdot,\cdot \rangle$ adalah hasil kali dalam dan $\left(\cdot \langle \cdot,\cdot \rangle \right)$ ruang hasil kali dalam, ruang hasil kali dalam yang lengkap disebut juga ruang Hilbert. Tujuan dari tugas akhir ini adalah menentukan fungsi linear terbatas pada ruang Hilbert dimana fungsi linear tersebut terbatas pada L dengan fungsi $L : H \to F$ yang berada pada ruang Hilbert. Berdasarkan proposisi 4.1 terbukti bahwa fungsi linear tersebut terbatas pada ruang Hilbert, dengan kata lain $\|L(h)\| \le \|L\|\|h\|$ untuk setiap $L \in (H, F)$ dan $h \in H$.

Kata Kunci: Fungsi Linear Terbatas , Ruang Hasil Kali Dalam , Ruang Hilbert.

BOUNDED LINEAR FUNCTION ON HILBERT SPACED

HASBI ASH SIDDIQ
10554001578

Date of Final Exam: 11 February 2010
Graduation Cremony Priod: July, 2010

Mathematic Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Let $\langle \cdot,\cdot \rangle$ *is inner product and* $\left(\cdot \langle \cdot,\cdot \rangle\right)$ *be a inner product space, inner product space complete is Hilbert space. Goal of this paper to determine introduction Bounded Linear Function on Hilbert Space. Linear function said bounded to* L *with function is* $L : H \to F$. *Based of deskription proposition 4.1 prove such that Bounded Linear Function on Hilbert Space or* $\|L(h)\| \le \|L\|\|h\|$ *for all* $L \in (H, F)$ *and* $h \in H$.

***Keywords**: Bounded Linear Function, Hilbert Space, Inner Product Space.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sejalan dengan perkembangan ilmu matematika yang begitu pesat, para pakar matematika mengembangkan banyak ilmu tentang analisis dan aljabar untuk memberikan keuntungan dan kemudahan dalam dunia *science*. Perkembangan ilmu matematika tersebut selalu bertambah maju dari zaman ke zaman, sebagai contoh perkembangan ilmu matematika adalah perkembangan konsep hasil kali dalam.

Konsep ruang hasil kali dalam ini juga berkaitan dengan ruang Hilbert Ruang hasil kali dalam yang lengkap disebut dengan ruang Hilbert, di dalam buku yang karang oleh Sherbert dengan judul *Introduction to Real Analysis* menjelaskan bahwa terdapat fungsi linier terbatas di dalam ruang Hilbert. Selanjutnya untuk dapat mengetahui bagaimana menentukan fungsi linear terbatas ini, Darmawijaya S. (2007) menjelaskan tentang fungsi linear terbatas dan penjelasan tentang ruang Hilbert.

Tahun 2007, fungsi linear terbatas telah dibahas dalam jurnal oleh H. Mazaheri dan R. Kazemi. Berdasarkan jurnal dan konsep hasil kali dalam maka penulis tertarik mengembangkan jurnal tersebut untuk dijadikan sebuah skripsi dengan judul **”FUNGSI LINEAR TERBATAS PADA RUANG HILBERT”**

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana bentuk “Fungsi Linear Terbatas pada Ruang Hilbert”, dimana bentuk dari fungsi linear terbatas tersebut didefenisikan pada ruang bernorma.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk menentukan ”Fungsi Linear Terbatas pada Ruang Hilbert” dari bentuk fungsi linear terbatas yang definisikan pada ruang bernorma.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tulisan ini mencakup 5 bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan.

Bab ll Landasan Teori

Bab ini berisikan informasi tentang teori-teori yang digunakan dalam penulisan ataupun metode/teorema yang dipakai.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini berisikan cara-cara atau langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan ”Fungsi Linear Terbatas pada Ruang Hilbert”

Bab IV Pembahasan dan Analisa

Bab ini berisikan penyelesaian masalah ”Fungsi Linear Terbatas pada Ruang Hilbert”

Bab V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori yang akan digunakan dalam pembahasan skripsi ini sebagai berikut :

2.1 Ruang Vektor

Dimulai dengan pengertian ruang vektor sebagai berikut :

Definisi 2.1 Jika $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ dan $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ adalah sebarang vektor pada R^n, maka hasil kali dalam *Euclidis (Euclidean inner product)* $u.v$ didefinisikan dengan $u.v=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$

Definisi 2.2 Misalkan V sebarang himpunan benda yang operasinya didefinisikan yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar (bilangan real).
Jika aksioma-aksioma berikut terpenuhi oleh semua u,v,w pada V dan oleh semua skalar k dan l maka dinamakan V ***sebuah ruang vektor***. Sedangkan benda-benda pada V dinamakan sebuah ***vektor.*** Aksioma-aksiomanya sebagai berikut :

1. Jika u dan v adalah benda-benda pada V, maka u + v berada di V
2. u + v = v + u (sifat komunitatif)
3. $u+(v+w)=(u+v)+w$ (sifat asosiatif)
4. Ada sebuah vektor $0\in V$ sehingga terdapat $0+u=u+0$ untuk semua u di V
5. Untuk setiap u di V, ada sebuah benda $-u$ di V sehingga $u+(-u)=(-u)+u=0$
6. Jika k adalah sebarang skalar dan u sebarang benda di V maka ku berada di V
7. $k(u+v)=ku+kv$
8. $(k+l)u=ku+lv$
9. $k(lu)=kl(u)$
10. $1u=u$

2.2 Ruang Hasil Kali Dalam (*Inner Product space)*

Ruang vektor real yang umum, konsep hasil kali dalam didefinisikan secara aksiomatis dengan mengunakan sifat-sifat dari aksiomatis definisi berikut ini.

Definisi 2.3 Sebuah hasil kali dalam (*inner product)* pada ruang vektor real V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan real $\langle \cdot,\cdot \rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor u dan v pada V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor u , v dan w di V juga untuk semua skalar k , dengan memenuhi beberapa aksioma berikut :

1. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$ (aksioma simetris)
2. $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$ (aksioma penambahan)
3. $\langle ku,v \rangle = k\langle u,v \rangle$ (aksioma kehomogenan)
4. $\langle u,u \rangle \geq 0$ dan $\langle u,u \rangle = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$ (aksioma kepositifan)

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ disebut hasil kali dalam dan $(V\langle \cdot,\cdot \rangle)$disebut ruang hasil kali dalam pada V .

Contoh 2.1

Misalkan $\langle u,v \rangle$adalah hasil kali dalam Euclidis pada R^3, dan misalkan $u = (u_1,u_2,u_3), v = (v_1,v_2,v_3), w = (w_1,w_2,w_3)$, dengan skalar k . Buktikan bahwa

a. $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$

b. $\langle ku,v \rangle = k\langle u,v \rangle$

Jawab:

a. $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$

$$= (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3),(w_1,w_2,w_3)$$
$$= (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + (u_3+v_3)w_3$$
$$= (u_1w_1+v_1w_1) + (u_2w_2+v_2w_2) + (u_3w_3+v_3w_3)$$

$$= \langle u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 \rangle + \langle v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \rangle$$
$$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

b. $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$

$$= (ku_1 v_1 + ku_2 v_2 + ku_3 v_3)$$
$$= k(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)$$
$$= k\langle u, v \rangle$$

2.3 Ruang Bernorma (*Normed Space)*

Ruang norma ini yang akan dikembangkan adalah pemahaman mengenai norma dan jarak dari konsep ruang *inner product* yang umum.

Definisi 2.4 Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam , maka **norma** (panjang) vektor u dinyatakan oleh $\| u \|$ dan didefinisikan oleh $\| u \| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Jika norma berada pada di R^2 maka $\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ begitu pula norma pada di R^n maka $\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$

Definisi 2.5 Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam , maka **jarak** antara dua titik vektor u dan v dinyatakan oleh $d(u,v)$ dan didefinisikan oleh $d(u,v) = \| u - v \|$

Definisi 2.6 Misalkan u adalah sebuah ruang norma dengan $\| \cdot \|$ fungsi bilangan real dikatakan norma pada V jika memenuhi beberapa sifat-sifat berikut :

1. $\| u \| \geq 0$, untuk setiap $u \in V$
2. $\| u \| = 0$, jika dan hanya jika $u = 0$
3. $\| ku \| = | k | \| u \|$, dengan k skalar dan $u = 0$
4. $\| u + v \| = \| u \| + \| v \|$, untuk semua $u, v = V$

$(V;\|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma pada V

2.4 Fungsi Linear

Fungsi dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang banyak digunakan dan mudah dalam memahaminya adalah fungsi linear, yaitu fungsi yang bersifat aditif dan homogen.

Definisi 2.7 Diberikan dua Ruang vektor V dan W, masing-masing atas lapangan F yang sama. Fungsi $f : V \to W$ disebut fungsi linear jika :

(i) f fungsi aditif (*additive)* :

$f(u+v) = f(u) + f(v) \forall u, v \in V$, dan

(ii) f fungsi homogen (*homogeneous)* :

$f(ku) = k\ f(u) \forall$ skalar k dan vektor $u \in V$.

2.5 Sifat-sifat Lengkap R

Definisi 2.8 Diberikan himpunan tak kosong $S \subseteq R$

1. Himpunan S dikatakan terbatas ke atas jika terdapat $u \in R$ sehingga $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$. Bilangan u disebut batas atas S .
2. Himpunan S dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat $w \in \Re$ sehingga $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Bilangan w disebut batas bawah S .
3. Himpunan S dikatakan terbatas jika S terbatas ke atas dan terbatas ke bawah.

2.6 Ruang Hilbert

Definisi 2.9 Misalkan H ruang vektor atas lapangan C. Pemetaan $\langle .,. \rangle : H \times H \to C$ yang memenuhi

1. $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle, \forall u, v, \in H; k \in C$
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in H$
3. $\langle u, u \rangle \geq 0, \forall u \in H; \langle u, u \rangle = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$

4. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

disebut hasil kali dalam pada H. Ruang vektor H atas C yang dilengkapi dengan hasil kali dalam $\langle \cdot,\cdot \rangle$ disebut ruang hasil kali dalam.

Ruang hasil kali dalam H dengan hasil kali dalam $\langle \cdot,\cdot \rangle$, dapat didefenisikan dengan norma $\| u \| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, yang dapat memenuhi beberapa sifat berikut :

1. $\| u \| \geq 0, \forall u \in H; \| u \| = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$
2. $\|ku\| = |k| \|u\|, \forall u \in H; k \in C$

Lemma 2.1 jika u dan v adalah vektor pada sebuah ruang hasil kali dalam maka $|(u,v)| \leq \|u\| \; \|v\|$ (Ketaksamaan Cauchy Schwarz).

Bukti:

Jika $u = 0$ dan $v = 0$ maka ketaksamaan Cauchy di atas terpenuhi, jika $u \neq 0$ dan $v \neq 0$, misalkan $\langle u,u \rangle = a$, $2\langle u,v \rangle = b$, $\langle v,v \rangle = c$ dan $t \in \Re$. Dengan mengunakan aksioma-aksioma kepositifan hasil kali dalam dari ketaksamaan Cauchy di atas di mana sebarang vektor itu sendiri negatif sehingga

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \langle tu+v, tu+v \rangle \\
&\leq (\langle tu+v \rangle \cdot \langle tu+v \rangle) \\
&= \langle u,u \rangle t^2 + 2\langle u,v \rangle t + \langle v,v \rangle \\
&= at^2 + bt + c
\end{aligned}
$$

Ketaksamaan Cauchy di atas menunjukkan bahwa $at^2 + bt + c$ yang tidak mempunyai akar real sehingga harus menggunakan deskriminasi yang memenuhi sifat $b^2 - 4ac \leq 0$ maka

$$
\begin{aligned}
(2\langle u,v \rangle)^2 - 4\langle u,u \rangle \langle v,v \rangle &\leq 0 \\
4\langle u,v \rangle^2 - 4\langle u,u \rangle \langle v,v \rangle &\leq 0 \\
\langle u,v \rangle^2 &\leq \langle u,u \rangle \langle v,v \rangle \\
\langle u,v \rangle^2 &\leq \|u\|^2 \|v\|^2
\end{aligned}
$$

$\left|\langle u,v\rangle\right| \leq \|u\|\|v\|$

Jadi **lemma 2.1** terbukti ■

Ruang hasil kali dalam H yang telah dilengkapi dengan norma $\|\cdot\|$ dapat juga didefenisikan sebagai $d(u,v)=\|u-v\|$, yang memenuhi beberapa sifat berikut:

1. $d(u,v)\geq 0, \forall u,v\in H; d(u,v)=0$ jika dan hanya jika $u=v$
2. $d(u,v)=d(v,u), \forall u,v\in H$
3. $d(u,w)\leq d(u,v)+d(v,w), \forall u,v,w\in H$

Definisi 2.10 Ruang hasil kali dalam H yang lengkap disebut juga Ruang Hilbert, yaitu setiap barisan Cauchy di dalamnya Konvergen.

Definisi 2.11 Barisan bilangan real $u=\{u_n\}$ dikatakan barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon>0$, $\exists H\in \mathrm{N}$, sehingga untuk setiap $m,n\in \mathrm{N}$ dengan $m,n\geq \mathrm{N}$ berlaku $\left|u_n-u_m\right|<\varepsilon$

Lemma 2.2 Jika $\{u_n\}$ barisan bilangan real yang konvergen maka $\{u_n\}$ barisan Cauchy.

Bukti:

Diketahui $\{u_n\}$ barisan bilangan real yang konvergen dengan kata lain $\{u_n\}$ konvergen ke u

Akan ditunjunkkan $\{u_n\}$ adalah barisan Cauchy

Jika $\{u_n\}$ konvergen ke u maka $\lim\{u_n\}=u$ atau $\forall\varepsilon>0$ $\exists H\in N \ni n\in N$ dengan $n\geq H$ berlaku $\left|u_n-u\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$, berarti $\forall m,n\in N$ dengan $m,n\geq H$ berlaku :

$$\begin{aligned}|u_n - u_m| &= |u_n - u + u - u_m| \\ &\leq |u_n - u| + |u - u_m| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\{u_n\}$ barisan Cauchy ■

Contoh 2.2

Tunjukkan bahwa $u_n = \frac{1}{n}$ barisan Cauchy

Jawab :

Diketahui $u_n = \frac{1}{n}$, akan ditunjukkan $u_n = \frac{1}{n}$ barisan Cauchy.

Diberikan $\varepsilon > 0$ dengan $H = H(\varepsilon)$ terdapat $H > \frac{2}{\varepsilon}$. $\forall\, m, n \in H$, didapat $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ yang mana berlaku

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Maka diperoleh $u_n = \frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy

Definisi 2.12 Barisan bilangan real $u = \{u_n\}$ dikatakan konvergen ke $u \in R$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k(\varepsilon)$, $k \in \mathrm{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathrm{N}$ dengan $n \geq k$ berlaku $|u_n - u| < \varepsilon$

Jika $|u_n - u| < \varepsilon$, barisan $\{u_n\}$ konvergen ke u atau barisan $\{u_n\}$ mempunyai limit u untuk $n \to \infty$ dan dituliskan sebagai berikut:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u$$

Barisan yang mempunyai limit disebut konvergen, sebaliknya jika barisan yang tidak mempunyai limit disebut divergen.

2.7 Fungsi Linear Terbatas

Definisi 13 Diberikan Fungsi $L: H \to F$, fungsi di katakan kontinu di suatu titik $a \in H$ jika sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $h \in H$ $|h-a| < \delta$ berlaku $|L(h) - L(a)| < \varepsilon$

Proposisi 2.1 Diberikan H adalah ruang Hilbert dan $L: H \to F$ fungsi linear. Pernyataan berikut ekivalen :

1. L kontinu
2. L kontinu di 0
3. L kontinu pada suatu titik
4. Terdapat konstanta $c > 0$, sehingga $|L(h)| \le c\|h\| \forall h \in H$

Bukti:

$1 \Rightarrow 2$: Karena L kontinu maka L kontinu di 0

$2 \Rightarrow 3$:

Diketahui L kontinu di 0

Akan ditunjukkan L kontinu pada suatu titik

Diambil sebarang $h \in H$ dan sebarang barisan $\{h_n\} \subset H$ yang konvergen ke h, sehingga diperoleh barisan $\{h_n - h\} = \{h_n\} - \{h\}$ konvergen ke $0 \in H$, karena fungsi $L: H \to F$ diperoleh :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} L(h_n) - L(h) &= \lim_{n\to\infty}\{L(h_n) - L(h)\} \\
&= \lim_{n\to\infty} L(h_n - h) \\
&= L(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena L kontinu di 0, terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} L(h_n) = L(h)$ yaitu fungsi L kontinu di setiap $h \in H$

$3 \Rightarrow 4:$

Diketahui $\{h_n\}$ konvergen ke h dengan $h \in H$, L kontinu di 0, L kontinu di suatu titik dan terdapat konstanta $c > 0$, sehingga akan ditunjukkan $|L(h)| \leq c\|h\|$, $\forall\, h \in H$

Andaikan himpunan $\{\|L(h)\| : h \in H \; dan \|h\| \leq 1\}$ tak terbatas. Oleh karena itu setiap bilangan asli n ada vektor $h_n \in H$ dengan $\|h_n\| \leq 1$ sehingga $\|L(h_n)\| > n$. Diperoleh barisan $\{h_n\} \subset H$ dengan $\lim\limits_{n\to\infty}\|L(h_n)\| = +\infty$. Dibentuk vektor $u_n = \dfrac{h_n}{n}$ untuk setiap bilangan asli n

Karena $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\| = \lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{h_n}{n}\right\| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\|u_n\| = 0$, barisan vektor $\{u_n\} \subset H$ kovergen ke 0 dan fungsi L kontinu di 0 diperoleh:

$$\overline{0} = L0 = \lim_{n\to\infty} L\left(\frac{h_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{L(h_n)}{n}$$

Hal in berarti ada bilangan $c > 0$ sehingga $\|L(h_n)\| < c$ untuk setiap bilangan asli n.

Terdapat konstanta $c > 0$ sehingga $h \in H$ dan $\|h\| \leq 1$ dan $L(h) \leq c$. Ambil sebarang $h \in H$ dan $h \neq \theta$, karena vektor $u = \dfrac{h}{\|h\|} \in H$ dan $\|u\| = 1$ diperoleh:

$$\|L(u)\| = \left\|L\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|h\|}\|L(h)\| \leq c \text{ atau } \|L(h)\| \leq c\|h\| \forall h \in H$$

$4 \Rightarrow 1:$

Diketahui $\{h_n\}$ konvergen ke h dengan $h \in H$, L kontinu di 0, L kontinu di suatu titik dan terdapat konstanta $c > 0$ dengan $|L(h)| \leq c\|h\|$, $\forall\, h \in H$ sehingga akan ditunjukkan L kontinu

Karena untuk setiap $h, a \in H$ diperoleh

$$\|L(h) - L(a)\| = \|L(h-a)\| \leq c\|h-a\|$$

Maka untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dipilih bilangan $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c+1} > 0$ sehingga untuk setiap $h, a \in H$ dengan $\|h-a\| < \delta$ berakibat

$$\|L(h) - L(a)\| \leq c\|h-a\| < \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa Fungsi L kontinu. ■

Definisi 2.14 Fungsi linear terbatas L pada H adalah fungsi linear dengan $c > 0$ sehingga $|L(h)| \leq c\|h\| \ \ \forall h \in H$. Sejalan dengan proposisi selanjutnya suatu fungsi linear terbatas jika hanya jika fungsi tersebut kontinu Fungsi linear terbatas $L : H \to F$, didefinisikan dengan $\|L\| = \sup\{|L(h)| : \|h\| \leq 1\}$. Dengan catatan , $\|L\| < \infty$; disebut norm L

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan skripsi ini penulis menggunakan metodologi studi literatur terhadap referensi-referensi yang berkaitan dengan hasil kali dalam, fungsi linear terbatas, ruang bernorma dan ruang Hilbert. Dimulai dengan memahami tentang definisi ruang hasil kali dalam dan memberikan contoh, memahami defenisi tentang ruang bernorma. Selain itu juga memahami tentang defenisi ruang Hilbert dan fungsi linear terbatas kemudian membuktikan bahwa $\|L(h)\| \leq \|L\|\|h\|$ adalah fungsi linear terbatas pada ruang Hilbert dan mengambil kesimpulan dari pembahasan yang telah dibahas.

BAB IV
PEMBAHASAN

Untuk bisa menentukan bentuk fungsi linear terbatas pada ruang *inner product* dengan membuktikan proposisi 4.1 pada bab IV tersebut, maka akan diketahui dahulu *inner product,* ruang norma, barisan cauchy yang konvergen pada ruang Hilbert

Seperti yang telah diketahui *inner product* yang lengkap dalam H disebut ruang Hilbert. Dimana kita akan lihat bentuk *inner product* adalah $\langle \cdot,\cdot \rangle$ atau $\langle u,v \rangle$ yang mana $u = \tilde{u} = \{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\}$ dan $v = \tilde{v} = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$. Untuk bisa diketahui fungsi $H \times H \to C$, maka bentuk *inner Product* dalam H adalah $(u,v) \in H \times H \to \langle u,v \rangle \in C$. Untuk dapat *inner product* berada di H maka haruslah memenuhi sifat-sifat berikut

1. $\langle u,v \rangle = \langle u,v \rangle$
2. $\langle ku,v \rangle = k\langle u,v \rangle$
3. $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$
4. $\langle u,u \rangle \geq 0$ jika dan hanya jika $u \neq 0$

Sifat-sifat diatas disebut hasil kali dalam pada H yang berada di C. Dalam bentuk contoh :

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i \tilde{v}_i, \forall \tilde{u} = \{u_1, u_2, \cdots u_n\}, \tilde{v} = \{v_1, v_2, \cdots v_n\} \in C^n (R^n)$$

Atau

1. $\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i \tilde{v}_i$
2. $\langle k\tilde{u}, \tilde{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} k\tilde{u}_i \tilde{v}_i = k\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i \tilde{v}_i = k\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle$
3. $\langle \tilde{u} + \tilde{v}, \tilde{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{u}_i + \tilde{v}_i)\tilde{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i \tilde{w}_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i \tilde{w}_i = \langle \tilde{u}, \tilde{w} \rangle + \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle$
4. $\tilde{u} \neq 0$ ada i sehingga $\tilde{u}_i \neq 0$

$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}_i \tilde{u}_i > 0$

Adapun bentuk ruang norm pada Ruang Hilbert $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$, $\forall u \in H$. Ruang norm dalam bentuk contohnya $\|\tilde{u}\| = \sqrt{\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right\}^{\frac{1}{2}}$, $\forall \tilde{u} \in H$ dimana $\tilde{u} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \in C^n\left(R^n\right)$.

Teorema 4.1 Diketahui H ruang pre-Hilbert, $\{u_n\}, \{v_n\} \subset H$ dan $u, v \in H$ serta k sebarang skalar

1) Jika barisan $\{u_n\}$ konvergen ke u, barisan $\{v_n\}$ konvergen ke v dan barisan $\{k_n\}$ konvergen ke k maka barisan $\{u_n + v_n\}$konvergen ke $u + v$, barisan $\{k_n u_n\}$konvergen ke $k_n u_n$
2) Jika $\{u_n\}, \{v_n\}$ dan $\{k_n\}$ masing-masing barisan Cauchy, $\{u_n + v_n\}$ dan $\{k_n u_n\}$ masing-masing barisan Cauchy. Lebih lanjut, barisan $\{\|u_n\|\}$ dan $\{\|k_n u_n\|\}$ konvergen.

Bukti:

1). Diketahui barisan $\{u_n\}$ konvergen ke u, barisan $\{v_n\}$ konvergen ke v dan barisan $\{k_n\}$ konvergen ke k. Akan ditunjukkan barisan $\{u_n + v_n\}$konvergen ke $u + v$ dan barisan $\{k_n u_n\}$konvergen ke $k_n u_n$

Sebagaimana yang telah ditunjukkan pada landasan teori tentang barisan bilangan real yang konvergen maka hal itu dapat dilihat pada teorema ini. Lihat $|u_n - u| < \varepsilon$ atau definisi 12 pada bab II, jika demikian halnya, dikatakan barisan $\{u_n\}$ konvergen ke u atau barisan $\{u_n\}$ mempunyai limit u untuk $n \to \infty$ dan dituliskan sebagai berikut:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u$$

karena $\{u_n\}$ konvergen ke u dan $\{k_n\}$ konvergen ke k, karena $\{u_n\}$ dan $\{k_n\}$ konvergen maka barisan tersebut artinya ada bilangan $c_1 > 0$ dan $c_2 > 0$ sehingga $c_1 \geq |k_n|$ dan $c_2 \geq \|u_n\|$ $\forall n \in N$.

Selanjutnya, karena $\{u_n\}$ konvergen ke u, $\{v_n\}$ yang konvergen ke v dan $\{k_n\}$ konvergen ke k, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dipilih bilangan asli n_0 sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku:

$$\|u_n - u\| < \frac{\varepsilon}{2(|k|+1)},\ \|v_n - v\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dan } |k_n - k| < \frac{\varepsilon}{2(c_2+1)}$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\|(u_n + v_n) - (u+v)\| &\leq \|u_n - u\| + \|v_n - v\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(|k|+1)} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\|k_n u_n - ku\| &= \|(k_n u_n) - (ku_n) + (ku_n) - (ku)\| \\ &= \|(k_n - k)u_n + k(u_n - u)\| \\ &\leq |k_n - k| \cdot \|u_n\| + |k|\|u_n - u\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(c_2+1)} c_2 + |k| \frac{\varepsilon}{2(|k|+1)} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $\{u_n + v_n\}$ konvergen ke $u_n + v_n$ dan $\{k_n u_n\}$ konvergen ke ku.

2). Diketahui $\{u_n\}, \{v_n\}$ dan $\{k_n\}$ masing-masing barisan Cauchy, $\{u_n + v_n\}$ dan $\{k_n u_n\}$ masing-masing barisan Cauchy. Akan ditunjukkan barisan $\{\|u_n\|\}$ dan $\{\|k_n u_n\|\}$ konvergen.

Karena $\{u_n\}, \{v_n\}$ dan $\{k_n\}$ barisan Cauchy, maka dapat dipilih bilangan asli n_1, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_1$ berakibat:

$$\|u_m - u_n\| < \frac{\varepsilon}{3(|k|+1)},\ \|v_m - v_n\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dan } |k_m - k_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Oleh karena itu untuk setiap dua biangan asli $m, n \geq n_1$, diperoleh:

$$\begin{aligned}\|(u_m + v_m) - (u_n + v_n)\| &\leq \|u_m - u_n\| + \|v_m - v_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3(|k|+1)} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Yang berarti bahwa $\{u_n + v_n\}$ barisan Cauchy

Karena

$$\left| \|u_m\| - \|u_n\| \right| \leq \|u_m - u_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk $m, n \geq n_1$ berarti bahwa $\{\|u_n\|\}$ barisan Cauchy maka $\{\|u_n\|\}$ konvergen. ■

Sebelum menentukan bentuk fungsi linear terbatas dengan mengunakan proposisi 2 pada hal IV-5 maka, terlebih dahulu kita buktikan bahwa $\alpha = \beta$.

Teorema 4.2 Untuk setiap $L \in (H, F)$ diperoleh bilangan $\alpha = \beta$ atau $\alpha = \sup\{\|L(h)\| : h \in H\ dan \|h\| = 1\}$, sedangkan $\beta = \inf\{c > 0 : \|L(h)\| \leq c\|h\|, h \in H\}$

Bukti:

Diberikan $v \in V$ sehingga akan ditunjukkan $\alpha = \beta$

Ambil sebarang $v \in V$ yang diketahui $\|f(v)\| < \beta\|v\|$ (i)

Kemudian bentuk vektor $u = \frac{v}{\|v\|} \in V$ dengan $\|u\| = 1$

Jadi:

$$\begin{aligned}\|f(u)\| &= \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \\ &= \frac{1}{\|v\|} \\ &\leq \alpha \Leftrightarrow \|f(v)\| \leq \alpha\|v\| \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil yang didapat dari (i) dan (ii) sehingga terbukti bahwa $\alpha \leq \beta$

Jika $u \in V$ dan $\|u\| \leq 1,$ maka

$$\|f(u)\| \leq \alpha \qquad \text{(iii)}$$

Ambil sebarang $v = \frac{u}{\|u\|} \in V$ dan $\|v\| \leq 1$, jadi:

$$\begin{aligned} \|f(v)\| &= \left\| f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| \\ &= \frac{1}{\|u\|}\|f(u)\| \\ &\leq \beta \end{aligned}$$

Atau $\|f(u)\| \leq \beta\|u\|$ karena $\|u\| \leq 1$ maka

$$\|f(u)\| = \beta \qquad \text{(iv)}$$

Berdasarkan hasil yang didapat dari (iii) dan (iv) maka disimpulkan $\alpha \leq \beta$ karena titik (i), (ii), (iii) dan (iv) terpenuhi maka terbukti bahwa $\alpha = \beta$. ■

Proposisi 4.1 Jika L fungsi linear terbatas, maka

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup\{|L(h)| : \|h\| = 1\} \\ &= \sup\{|L(h)|/\|h\| : h \in H, h \neq 0\} \\ &= \inf\{c > 0 : |L(h)| \leq c\|h\|, h \in H\} \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $\|L(h)\| \leq \|L\|\|h\|$ untuk setiap $h \in H$

Dengan $\alpha = \sup\{|L(h)| : \|h\| = 1\}$

$$\beta = \inf\{c > 0 : |L(h)| \leq c\|h\|, h \in H\}$$

Bukti:

Diketahui L fungsi linear terbatas , sehingga akan ditunjukkan $\|L(h)\| \leq \|L\|\|h\|$ untuk setiap $h \in H$. Berdasarkan Untuk setiap $L \in (H, F)$maka diperoleh

$$\|L\| = \alpha = \sup\{\|L(h)\| : h \in H \; dan \|h\| = 1\} \geq 0$$

dan

$$\|L\| = \alpha = \sup\{\|L\| : h \in H \; dan \|h\| = 1\} = 0 \Leftrightarrow L(h) = \overline{0}$$

Untuk setiap $h \in H \Leftrightarrow f = 0$ dari H ke F $0 \in (H, F)$

Jika k skalar dan $L \in (H, F)$, maka $kL \in (H, F)$

$$\begin{aligned} \|kL\| &= \sup\{\|kL(h)\| : h \in H \; dan \|h\| = 1\} \\ &= \sup\{|k|\|L(h)\| : h \in H \; dan \|h\| = 1\} \\ &= |k| \sup\{\|L(h)\| : h \in H \; dan \|h\| = 1\} \\ &= |k|\|L\| \end{aligned}$$

Jika pada penjumlahan $L, M \in (H, F)$, maka diperoleh $L + M \in (H, F)$ jadi:

$$\begin{aligned} \|L + M\| &= \sup\{\|L(h) + M(h)\| : h \in H \; dan \|h\| = 1\} \\ &= \sup\{\|L(h)\| + M(h) : h \in H \; dan \|h\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|L(h)\| : h \in H \; dan \|h\| = 1\} + \sup\{M(h) : h \in H \; dan \|h\| = 1\} \\ &= \|L\| + \|M\| \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\|\cdot\|$ merupakan norma pada (H, F)

Ditambah lagi pada pembuktian **proposisi 2.1** nomor 4, dimana terdapat konstanta $c > 0$ sehingga $h \in H$ dan $\|h\| = 1$ dan $L(h) \leq c$. Ambil sebarang $h \in H$ dan $h \neq \theta$, karena vektor $h = \dfrac{h}{\|h\|} \in H$ dan $\|h\| = 1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \|L(h)\| \\ &= \left\| L\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \right\| \\ &= \frac{1}{\|h\|} \|L(h)\| \\ &= \frac{\|L(h)\|}{\|h\|} \leq c \\ &= \|L(h)\| \leq c\|h\| \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian dari $\alpha = \beta$ ditambah dengan proposisi 2.1 maka proposisi 2 benar, sehingga diperoleh $\|L(h)\| \leq \|L\|\|h\|$ untuk setiap $L \in (H, F)$ dan $h \in H$. ■

Contoh 4.1

Jika H dan F masing-masing ruang bernorma, fungsi $L : H \to F$ linear, dan ada bilangan $x > 0$ dengan sifat $\|L(h)\| < x\|h\|$ untuk setiap $h \in H$, maka buktikan bahwa L merupakan fungsi kontinu.

Jawab :

Berdasarkan pada **proposisi 1** dimana:

1. L kontinu
2. L kontinu di 0
3. L kontinu pada suatu titik
4. Terdapat konstanta $u > 0$, sehingga $|L(h)| \leq u\|h\| \forall h \in H$

Diketahui L kontinu di 0

Akan ditunjukkan L kontinu pada suatu titik

Diambil sebarang $h \in H$ dan sebarang barisan $\{h_n\} \subset H$ yang konvergen ke h, barisan $\{h_n - h\} = \{h_n\} - \{h\}$ konvergen ke $0 \in H$, karena fungsi $L : H \to F$ diperoleh :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L(h_n) - L(h) &= \lim_{n\to\infty}\{L(h_n) - L(h)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} L(h_n - h) \\ &= L(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Karena L kontinu di 0, terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} L(h_n) = L(h)$ yaitu fungsi L kontinu di setiap $h \in H$

$3 \Rightarrow 4$:

Diketahui $\{h_n\}$ konvergen ke h dengan $h \in H$, L kontinu di 0, L kontinu di suatu titik dan terdapat konstanta $c > 0$, sehingga akan ditunjukkan $|L(h)| \leq c\|h\|$, $\forall h \in H$

Andaikan himpunan $\{\|L(h)\| : h \in H \; dan \|h\| \leq 1\}$ tak terbatas. Oleh karena itu setiap bilangan asli n ada vektor $h_n \in H$ dengan $\|h_n\| \leq 1$ sehingga $\|L(h_n)\| > n$. Diperoleh barisan $\{h_n\} \subset H$ dengan $\lim\limits_{n \to \infty} \|L(h_n)\| = +\infty$. Dibentuk vektor $u_n = \dfrac{h_n}{n}$ untuk setiap bilangan asli n

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{h_n}{n} \right\| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \|u_n\| = 0$, barisan vektor $\{u_n\} \subset H$ kovergen ke 0 dan fungsi L kontinu di 0 diperoleh:

$$\overline{0} = L0 = \lim_{n\to\infty} L\left(\frac{h_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{L(h_n)}{n}$$

Hal ini berarti ada bilangan $x > 0$ sehingga $\|L(h_n)\| < x$ untuk setiap bilangan asli n.

Terdapat konstanta $x > 0$ sehingga $h \in H$ dan $\|h\| \leq 1$ dan $L(h) \leq x$. Ambil sebarang $h \in H$ dan $h \neq \theta$, karena vektor $u = \dfrac{h}{\|h\|} \in H$ dan $\|u\| = 1$ diperoleh:

$$\|L(u)\| = \left\| L\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|h\|} \|L(h)\| \leq x \text{ atau } \|L(h)\| \leq x\|h\| \forall h \in H$$

Dengan pembuktian diatas maka fungsi $L : H \to F$ yang terdapat konstanta $x > 0$ dengan sifat $\|L(h)\| < x\|h\|$ untuk setiap $h \in H$, bahwa L merupakan fungsi kontinu.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya dapat di tarik kesimpuan yaitu :

1. Hasil kali dalam yang lengkap disebut ruang Hilbert yaitu barisan Cauchy di dalamnya konvergen
2. Terdapat $\|L(h)\| \leq \|L\|\|h\|$ untuk setiap $L \in (H, F)$ dan $h \in H$, sehingga fungsi linear terbatas pada ruang Hilbert.

5.2 SARAN

Penulisan ini dibahas tentang menentukan bentuk Fungsi Linear Terbatas pada ruang Hilbert. Bagi yang tertarik dapat mengembangkan penelitian dengan menentukan bentuk Fungsi Linear lainnya pada ruang *inner product* atau Fungsi Linear Terbatas ini pada ruang *2_inner product.*

Daftar Pustaka

Anton, H., ”*Aljabar Linier Elementer”*, Edisi kelima, Alih bahasa oleh pantur silaban dan I nyoman susila, Erlangga, Jakarta, 1994.

Conway, J. B., “*A Course in Functional Analysis”*, Second Edition, New York : Springer Verlag, 1990.

Darmawijaya, S. “*Pengantar Analisis Abstrak”*, Yogyakarta, 2007.

Gunawan, H., “*Pengantar Analisis Fourier dan Teori Aproksimasi*”, Http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/files/2009/bab0-b.pdf, diakses 25 November 2009.

Mazaheri, H., dan Kazemi, R., ”Some Result on 2-Inner Product Space”, *Novi Sad J. Math*, vol 37 (2) : 35-40. 2007.

Bartle, R. G., dan Sherbert, D. R., “*Introduction to Real Analysis”,* Second edtion, 1991.

Wiley Jhon, “*Linear Algebra”*, New York University, 1997.